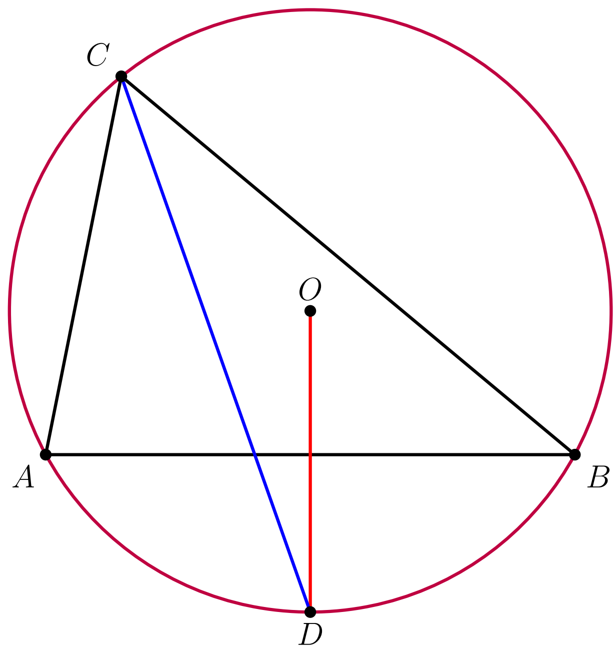
Pentatic Mathematics Competition VIII

16 Oktober 2020 - 18 Oktober 2020



Garis sumbu OD berpotongan dengan garis bagi CD di lingkaran luar segitiga ABC.

I

Soal

PETUNJUK

1. Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal.
2. Disarankan untuk mengerjakannya menggunakan laptop. Jika menggunakan HP, disarankan untuk menggunakannya dengan posisi *landscape*.
3. Lama pengerjaan soal adalah 2 hari, yaitu pada tanggal 20 Oktober 2020 sampai tanggal jam 23 : 59.
4. Dilarang menggunakan alat bantu hitung seperti, kalkulator, busur derajat, maupun alat bantu hitung lainnya.
5. Terdiri dari 2 bagian: kemampuan dasar dan kemampuan lanjut.
6. Untuk kemampuan dasar:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Jawaban dipastikan bilangan cacah,
   (c). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapatkan 2 (dua) poin,
   (d). Untuk soal yang dijawab **salah**, mendapatkan -1 (minus satu) poin,
   (e). Untuk soal yang **kosong (tidak dijawab)**, mendapatkan 0 (nol) poin.
7. Untuk kemampuan lanjut:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Jawaban dipastikan bilangan cacah,
   (c). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapatkan 5 (lima) poin,
   (d). Untuk soal yang dijawab **salah** atau **kosong (tidak dijawab)**, mendapatkan 0 (nol) poin.
8. Setiap jawaban dipastikan bilangan cacah.
9. Selamat mengerjakan!

1 Kemampuan Dasar

1. Diberikan

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 2019 + 2020$$
$$B = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 2018 + 2020$$

   Tentukan nilai $2 \times B - A$.

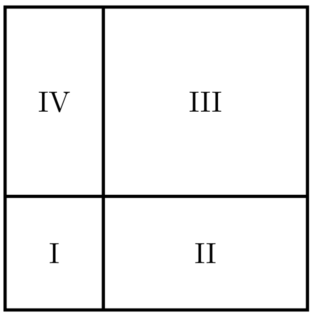
2. Jumlah harga dari segelas gelas kopi, dua permen, dan dua teh botol adalah Rp17.000,00. Sedangkan, jumlah harga dua gelas kopi, satu permen, dan dua teh botol adalah Rp31.000,00. Tentukan selisih dari harga segelas kopi dan sebuah permen dalam rupiah.

3. Sebuah dadu dilemparkan dua kali dimana dadu tersebut dituliskan dengan angka $1, 2, 3, 4, 5,$ dan 6. Angka yang muncul pada sisi atas dicatat untuk setiap pelemparan. Jika peluang angka yang dicatat berjumlah 8 dapat dinyatakan dalam pecahan sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai dari $a \times b$.

4. Pada suatu permainan terdiri dari n pemain: satu *impostor* dan sisanya *crewmate*. Pada tempat tertentu, terdapat sandi yang dapat diketahui oleh *crewmate*, tetapi tidak diketahui *impostor*. Suatu ketika, *impostor* mendengar suatu percakapan oleh dua *crewmate*. *Impostor* mendengar bahwa sandi tersebut merupakan bilangan asli terdiri dari tiga angka yang habis dibagi 24. Agar *impostor* tidak dituduh, maka *impostor* harus menyebutkan sandi yang dimaksud. Bila *impostor* menyebutkan bilangan yang sama dengan salah satu *crewmate*, maka kedua pemain tersebut akan dituduh sebagai *impostor*. Jika semua *crewmate* mengetahui sandi yang dimaksud, tentukan nilai n terkecil sehingga dapat dipastikan bahwa *impostor* akan dituduh.

5. Suatu garis ℓ menyinggung $y = x^2 + 2x + 2$ di titik puncaknya. Jika gradien garis ℓ adalah m dan garis ℓ memotong sumbu-y di titik $(0, n)$, tentukan nilai $m + n$.

6. Suatu persegi dibagi menjadi empat persegi panjang, yaitu I, II, III, dan IV seperti gambar berikut.

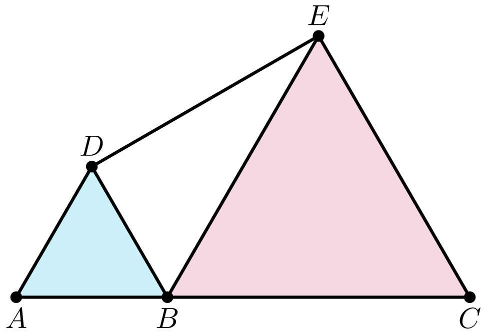


   Luas persegi panjang I adalah 3 satuan luas, luas persegi panjang II adalah 5 satuan luas, dan luas persegi panjang III adalah 15 satuan luas. Misalkan keliling dari persegi panjang IV adalah K satuan. Tentukan nilai dari K^2.

7. Tentukan nilai dari $x + y - z$ terbesar dimana

$$(x + y)(x + y + z) = 120$$
$$(y + z)(x + y + z) = 72$$
$$(x + z)(x + y + z) = 96$$

8. Diberikan titik A, B, C segaris. Dibuat dua segitiga sama sisi dengan panjang AB dan BC. Diketahui bahwa panjang $AC = 9$ satuan dimana panjang $BC = 2AB$. Misalkan panjang DE adalah s satuan. Tentukan nilai dari s^4.



9. Diberikan a dan b adalah dua bilangan real positif yang memenuhi $a - b = \sqrt{2ab}$. Jika nilai dari $\frac{a}{b}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ dimana x dan y bilangan asli, tentukan nilai dari xy.

10. Diberikan persegi $ABCD$ dan M merupakan titik tengah AB. Diagonal BD dan MC berpotongan di titik X. Dibuat garis ℓ yang melalui titik X. Garis ℓ sejajar dengan AB memotong sisi AD berturut-turut di titik Z. Diketahui luas $AMXZ$ adalah 1 satuan luas. Jika luas persegi $ABCD$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a, b bilangan asli dan $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai $a + b$.

2 Kemampuan Lanjut

1. Didefinisikan $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$ untuk setiap bilangan asli n. Diberikan
$$f(m,n) = \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
untuk setiap bilangan asli $m \leq n$. Jika nilai dari
$$f(2,2020)\,(1 + f(3,2020)) - f(1,2020) \cdot f(3,2020)$$
dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{2020}$, tentukan nilai a.

2. Diberikan $0 < x < 1$ yang memenuhi
$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = 16$$
Tentukan nilai dari $2020x$.

3. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli (a,b,c,d) yang memenuhi
$$10 \leq a + b + c + d \leq 100$$

4. Diberikan segilima $ABCDE$ dimana $\angle BAE = \angle ABC = 90^\circ$ dan $\angle BCD = \angle AED = 120^\circ$. Panjang $BC = CD = DE = EA = \frac{AB}{3}\sqrt{3}$. Misalkan AC dan BD berpotongan di titik F. Perbandingan luas $AFDE$ terhadap segilima $ABCDE$ dapat dinyatakan dalam bentuk $p : q$ dimana p, q bilangan asli dan $FPB(p,q) = 1$. Tentukan nilai $p + q$.

5. Jika nilai dari
$$\frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{3^3 - 3} + \frac{1}{4^3 - 4} + \frac{1}{5^3 - 5} + \cdots + \frac{1}{100^3 - 100}$$
dapat dinyatakan dalam pecahan sederhana $\frac{a}{b}$. Tentukan nilai dari $a + b$.

6. Tentukan banyak bilangan asli $1 \leq n \leq 2020$ sehingga faktor persekutuan terbesar dari $2n + 5$ dan $5n + 9$ merupakan bilangan prima.

7. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (a,b,c) sehingga
$$2020 = ab + ac + abc$$

8. Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 15\}$. Suatu himpunan $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dimana $A \subseteq S$ dikatakan *aneh* jika memenuhi
$$\begin{aligned} x_2 &\geq x_1 + 1 \\ x_3 &\geq x_2 + 2 \\ x_4 &\geq x_3 + 3 \end{aligned}$$
Tentukan banyak himpunan A aneh yang dapat dibentuk.

9. Diberikan x, y, z memenuhi $x = y + z$ dan didefinisikan fungsi f dan g sebagai

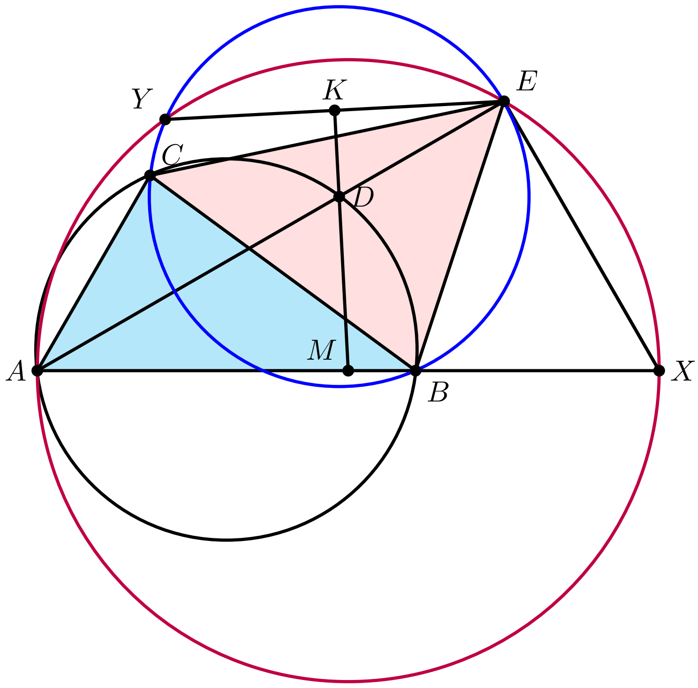
$$f(x,y) = \frac{x^5}{(3x+2y)^4 - 18xy(3x+2y)^2 + 36(xy)^2}$$
$$g(x,y) = \frac{y^5}{(2y+3x)^4 - 18yx(2y+3x)^2 + 3y(yx)^2}$$

Jika

$$f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) = 4$$
$$g(x,y) + g(y,z) + g(z,x) = 2$$

Tentukan nilai x.

10. Kejutan! Diberikan segitiga ABC dengan I merupakan titik pusat lingkaran dalamnya. Garis AI memotong lingkaran luar segitiga ABC di titik D dimana $D \neq A$. Misalkan E adalah bayangan pencerminan titik I terhadap D. Titik X terletak pada perpanjangan sisi AB sehingga $\angle XED = 90°$. Misalkan M titik tengah dari AX. Lingkaran luar dari segitiga AEX dan segitiga BEC berpotongan di titik Y dimana $Y \neq E$. Jika garis MD berpotongan dengan YZ di titik K, tentukan nilai dari $100 \cdot \dfrac{YE}{YK}$.



II

Soal dan Solusi

1 Kemampuan Dasar

1. Diberikan

$$\begin{aligned} A &= 1+2+3+4+5+\cdots+2019+2020 \\ B &= 2+4+6+8+10+\cdots+2018+2020 \end{aligned}$$

Tentukan nilai $2 \times B - A$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{1010}}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} B - A &= 2+4+6+8+\cdots+2020-(1+2+3+4+\cdots+2020) \\ &= 2+4+6+8+\cdots+2020-1-2-3-4-\cdots-2020 \\ &= -1-3-5-\cdots-2019 \\ B - A + B &= -1-3-5-\cdots-2019+2+4+6+\cdots+2020 \\ 2B - A &= (2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(2020-2019) \\ &= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{\text{sebanyak } 1010} \\ 2B - A &= 1010 \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $2 \times B - A$ adalah $\boxed{1010}$.

> **Komentar.** Sebanyak 67.34% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah**.

2. Jumlah harga dari segelas gelas kopi, dua permen, dan dua teh botol adalah Rp17.000,00. Sedangkan, jumlah harga dua gelas kopi, satu permen, dan dua teh botol adalah Rp31.000,00. Tentukan selisih dari harga segelas kopi dan sebuah permen dalam rupiah.

Jawab: $\boxed{\mathbf{14000}}$

Misalkan harga dari segelas kopi adalah k, sebuah permen adalah p, dan sebuah teh botol adalah t dalam rupiah. Maka kita punya persamaan

$$k + 2p + 2t = 17000 \tag{1}$$
$$2k + p + 2t = 31000 \tag{2}$$

Kurangkan persamaan (1) dan (2). Maka

$$\begin{aligned} k+2p+2t-(2k+p+2t) &= 17000-31000 \\ k+2p+2t-2k-p-2t &= -14000 \\ p-k &= -14000 \\ k-p &= 14000 \end{aligned}$$

Jadi, selisih harga segelas kopi dan sebuah permen adalah $\boxed{14000}$ dalam rupiah.

> **Komentar.** Sebanyak 83.67% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka soal merupakan soal **termudah** pada bagian kemampuan dasar.

3. Sebuah dadu dilemparkan dua kali dimana dadu tersebut dituliskan dengan angka $1, 2, 3, 4, 5$, dan 6. Angka yang muncul pada sisi atas dicatat untuk setiap pelemparan. Jika peluang angka yang dicatat berjumlah 8 dapat dinyatakan dalam pecahan sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai dari $a \times b$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{180}}$

   Misalkan angka pertama yang dicatat adalah a dan angka kedua yang dicatat adalah b. Maka $a + b = 8$ dimana $1 \le a, b \le 6$. Kita dapatkan bahwa

   $$(a, b) = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

   yang berarti ada 5 kemungkinan. Banyak total semua kemungkinan adalah $6 \cdot 6 = 36$ sehingga peluangnya adalah $\frac{5}{36}$. Demikian $a = 5$ dan $b = 36$ yang berarti $a \times b = 5 \times 36 = \boxed{180}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 61.22% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah**.

4. Pada suatu permainan terdiri dari n pemain: satu *impostor* dan sisanya *crewmate*. Pada tempat tertentu, terdapat sandi yang dapat diketahui oleh *crewmate*, tetapi tidak diketahui *impostor*. Suatu ketika, *impostor* mendengar suatu percakapan oleh dua *crewmate*. *Impostor* mendengar bahwa sandi tersebut merupakan bilangan asli terdiri dari tiga angka yang habis dibagi 24. Agar *impostor* tidak dituduh, maka *impostor* harus menyebutkan sandi yang dimaksud. Bila *impostor* menyebutkan bilangan yang sama dengan salah satu *crewmate*, maka kedua pemain tersebut akan dituduh sebagai *impostor*. Jika semua *crewmate* mengetahui sandi yang dimaksud, tentukan nilai n terkecil sehingga dapat dipastikan bahwa *impostor* akan dituduh.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{38}}$

   Dalam penentuan banyaknya *crewmate*, hal ini sama saja dengan menentukan banyak bilangan asli tiga angka yang habis dibagi 24. Yaitu ada sebanyak

   $$\left\lfloor \frac{999}{24} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{24} \right\rfloor = 41 - 4 = 37$$

   dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Sehingga setidaknya ada $37 + 1 = 38$ pemain (termasuk *impostor*) agar dapat dipastikan terdapat dua pemain yang menyebutkan sandi yang sama. Jadi, nilai n terkecil adalah $\boxed{38}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 36.73% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-sulit**. Kunci penyelesaian dari soal ini yaitu dalam penentuan banyak *crewmate* sama dengan banyak bilangan tiga digit yang habis dibagi 24.

5. Suatu garis ℓ menyinggung $y = x^2 + 2x + 2$ di titik puncaknya. Jika gradien garis ℓ adalah m dan garis ℓ memotong sumbu-y di titik $(0, n)$, tentukan nilai $m + n$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{1}}$

Tinjau titik puncak dari $y = x^2 + 2x + 2$ adalah $(x_{\text{op}}, y_{\text{op}})$, dimana

$$x_{\text{op}} = \frac{-2}{2(1)} = -1$$

Dan

$$y_{\text{op}} = (-1)^2 + 2(-1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

Misalkan persamaan garis ℓ adalah $y = ax + b$. Garis tersebut menyinggung $y = x^2 + 2x + 2$ di titik puncaknya. Artinya garis ℓ melalui titik $(-1, 1)$. Sehingga

$$1 = a(-1) + b \iff 1 = -a + b$$

yang berarti $b = a + 1$. Karena $y = x^2 + 2x + 2$ berpotongan dengan ℓ, maka

$$\begin{aligned} ax + b &= x^2 + 2x + 2 \\ ax + a + 1 &= x^2 + 2x + 2 \\ 0 &= x^2 + 2x + 2 - ax - a - 1 \\ 0 &= x^2 + (2 - a)x + (1 - a) \end{aligned} \tag{1}$$

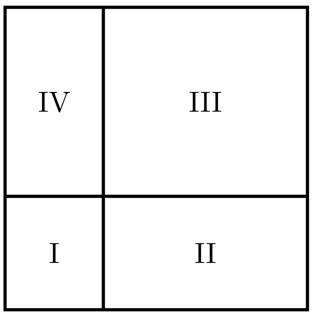
Karena hanya memotong tepat di satu titik (menyinggung), maka diskriminan dari (1) haruslah $\Delta = 0$. Maka

$$\begin{aligned} (2 - a)^2 - 4(1)(1 - a) &= 0 \\ 4 - 4a + a^2 - 4 + 4a &= 0 \\ a^2 &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Kita dapatkan $b = a + 1 = 0 + 1 = 1$. Demikian persamaan garis ℓ adalah $y = ax + b = 1$. Artinya, gradien garis ℓ adalah $a = 0$ yang berarti $m = 0$ dan memotong sumbu-y di titik $(0, 1)$ yang berarti $n = 1$. Demikian $m + n = \boxed{1}$.

> **Komentar.** Sebanyak 46.93% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**. Kunci penyelesaian dari soal ini adalah memanfaatkan fakta yang tersedia pada soal dengan diskriminan dari suatu persamaan kuadrat.

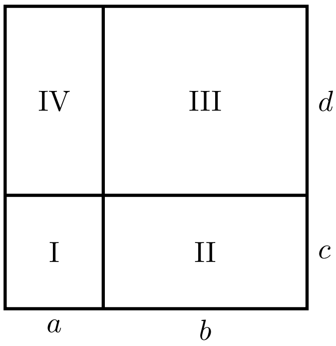
6. Suatu persegi dibagi menjadi empat persegi panjang, yaitu I, II, III, dan IV seperti gambar berikut.



Luas persegi panjang I adalah 3 satuan luas, luas persegi panjang II adalah 5 satuan luas, dan luas persegi panjang III adalah 15 satuan luas. Misalkan keliling dari persegi panjang IV adalah K satuan. Tentukan nilai dari K^2.

Jawab: $\boxed{\mathbf{162}}$

Kita misalkan panjang sisinya sebagai berikut.



Perhatikan bahwa

- Luas persegi panjang I adalah 3 satuan luas, artinya $ac = 3$.
- Luas persegi panjang II adalah 5 satuan luas, artinya $bc = 5$.
- Luas persegi panjang III adalah 15 satuan luas, artinay $bd = 15$.

Perhatikan bahwa

$$\frac{3}{5} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \iff \frac{3}{5} = \frac{a}{b}$$

Maka $b = \dfrac{5}{3}a$. Perhatikan juga bahwa

$$\frac{5}{15} = \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} \iff \frac{1}{3} = \frac{c}{d}$$

yang berarti $d = 3c$.

Karena persegi, maka $a + b = c + d$. Sehingga

$$\begin{aligned}
a + b &= c + d \\
a + \frac{5}{3}a &= c + 3c \\
\frac{8}{3}a &= 4c \\
c &= \frac{8}{3}a \cdot \frac{1}{4} \\
c &= \frac{2}{3}a
\end{aligned}$$

Karena $bc = 5$,

$$\begin{aligned}
bc &= 5 \\
\frac{5}{3}a \cdot \frac{2}{3}a &= 5 \\
\frac{10}{9}a^2 &= 5 \\
a^2 &= 5 \cdot \frac{9}{10} \\
a^2 &= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Kita punya juga

$$d = 3c = 3 \cdot \frac{2}{3}a = 2a$$

Kita peroleh keliling dari persegi panjang IV adalah

$$\begin{aligned} K &= 2(a+d) \\ &= 2(a+2a) \\ &= 2\cdot 3a \\ &= 6a \\ K^2 &= 36a^2 \\ &= 36\cdot\frac{9}{2} \\ K^2 &= 162 \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari K^2 adalah $\boxed{162}$.

> **Komentar.** Sebanyak 61.22% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah**.

7. Tentukan nilai dari $x+y-z$ terbesar dimana

$$\begin{aligned} (x+y)(x+y+z) &= 120 \\ (y+z)(x+y+z) &= 72 \\ (x+z)(x+y+z) &= 96 \end{aligned}$$

Jawab: $\boxed{8}$

Jelas dari $x+y, y+z, x+z$, dan $x+y+z$ masing-masing tak nol. Tinjau

$$\frac{120}{72} = \frac{(x+y)(x+y+z)}{(y+z)(x+y+z)} = \frac{x+y}{y+z} \iff \frac{5}{3} = \frac{x+y}{y+z}$$

Dengan mengalikan silang didapatkan

$$\begin{aligned} 5(y+z) &= 3(x+y) \\ 5y+5z &= 3x+3y \\ 5z &= 3x+3y-5y \\ 5z &= 3x-2y \end{aligned} \tag{1}$$

Tinjau juga

$$\frac{72}{96} = \frac{(y+z)(x+y+z)}{(x+z)(x+y+z)} = \frac{y+z}{x+z} \iff \frac{3}{4} = \frac{y+z}{x+z}$$

Dengan mengalikan silang didapatkan

$$\begin{aligned} 3(x+z) &= 4(y+z) \\ 3x+3z &= 4y+4z \\ 3x-4y &= 4z-3z \\ 3x-4y &= z \end{aligned} \tag{2}$$

Subtitusikan persamaan (2) ke persamaan (1). Maka

$$\begin{aligned}
5z &= 3x - 2y \\
5(3x - 4y) &= 3x - 2y \\
15x - 20y &= 3x - 2y \\
15x - 3x &= 20y - 2y \\
12x &= 18y \\
x &= \frac{3}{2}y
\end{aligned}$$

Subtitusikan ke (2). Maka

$$z = 3x - 4y = 3 \cdot \frac{3}{2}y - 4y = \frac{9}{2}y - 4y = \frac{1}{2}y$$

Tinjau

$$\begin{aligned}
(x + y)(x + y + z) &= 120 \\
\left(\frac{3}{2}y + y\right)\left(\frac{3}{2}y + y + \frac{1}{2}y\right) &= 120 \\
\frac{5}{2}y \cdot 3y &= 120 \\
\frac{15}{2}y^2 &= 120 \\
y^2 &= 120 \cdot \frac{2}{15} \\
y^2 &= 16 \\
y &= \pm 4
\end{aligned}$$

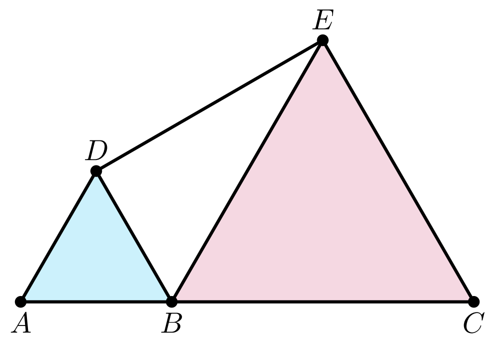
Sehingga kita peroleh $(x, y, z) = (6, 4, 2), (-6, -4, -2)$.

- Jika $(x, y, z) = (6, 4, 2)$, maka $x + y - z = 6 + 4 - 2 = 8$.
- Jika $(x, y, z) = (-6, -4, -2)$, maka $x + y - z = -6 + (-4) - (-2) = -6 - 4 + 2 = -8$.

Jadi, nilai terbesar dari $x + y - z$ adalah $\boxed{8}$.

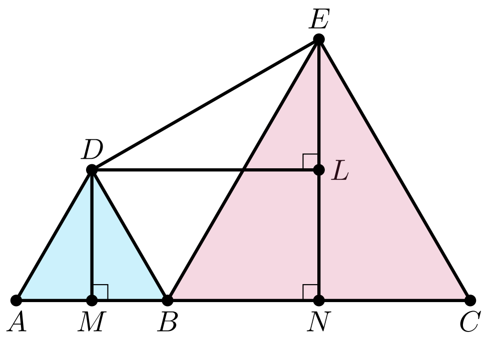
> **Komentar.** Sebanyak 75.51% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah**.

8. Diberikan titik A, B, C segaris. Dibuat dua segitiga sama sisi dengan panjang AB dan BC. Diketahui bahwa panjang $AC = 9$ satuan dimana panjang $BC = 2AB$. Misalkan panjang DE adalah s satuan. Tentukan nilai dari s^4.



Jawab: $\boxed{\mathbf{729}}$

Kita tarik garis tinggi dari titik D ke sisi AB dan memotong di M, sedangkan garis tinggi dari titik E ke sisi BC memotong sisi BC di titik N. Tarik garis tinggi dari titik D ke EN dan memotong di L.



Misalkan panjang $AB = s$, maka panjang $BC = 2s$. Perhatikan bahwa $AC = AB + BC = 9$. Sehingga

$$\begin{aligned} AC = AB + BC &= 9 \\ s + 2s &= 9 \\ 3s &= 9 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

Demikian panjang $BC = 2s = 6$. Perhatikan segitiga MBD. Kita tahu bahwa $\angle MBD = 60^\circ$. Sehingga $\angle BDM = 30^\circ$. Dari perbandingan segitiga $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, maka $BM : MD : BD = 1 : \sqrt{3} : 2$. Karena panjang $BD = s = 3$, maka

$$MD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dan juga

$$MB = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Dengan cara yang sama, kita dapatkan juga $\angle BEN = 30^\circ$ sehingga $BN : NE : BE = 1 : \sqrt{3} : 2$. Karena panjang $BE = 2s = 6$, maka

$$NE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$$

Dan juga

$$BN = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Perhatikan bahwa panjang $NL = DM = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Sehingga panjang

$$DM = NE - NL = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dan juga panjang

$$DL = MN = MB + BN = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

Dari segitiga DLE, dengan pythagoras, maka

$$\begin{aligned} DE^2 &= DL^2 + EL^2 \\ s^2 &= \frac{81}{4} + \frac{27}{4} \\ &= \frac{108}{4} \\ s^2 &= 27 \\ s^4 &= 27^2 \\ s^4 &= 729 \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari s^4 adalah $\boxed{729}$.

> **Komentar.** Sebanyak 63.26% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah**. Alternatif lain dalam menyelesaikan soal tersebut dengan menggunakan aturan cosinus dari segitiga DBE.

9. Diberikan a dan b adalah dua bilangan real positif yang memenuhi $a - b = \sqrt{2ab}$. Jika nilai dari $\frac{a}{b}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ dimana x dan y bilangan asli, tentukan nilai dari xy.

Jawab: $\boxed{\mathbf{12}}$

Tinjau bahwa haruslah $a - b = \sqrt{2ab} > 0$ yang berarti $a > b$.

$$\begin{aligned} a - b &= \sqrt{2ab} \\ (a-b)^2 &= 2ab \\ a^2 - 2ab + b^2 &= 2ab \\ a^2 - 4ab + b^2 &= 0 \\ a^2 - 4ab + 4b^2 &= 3b^2 \\ (a-2b)^2 &= 3b^2 \\ a - 2b &= \pm b\sqrt{3} \\ a &= 2b \pm b\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kita tinjau dua kemungkinan.

- Untuk $a = 2b + b\sqrt{3}$. Kita cek bahwa haruslah $a > b$.

$$\begin{aligned} 2b + b\sqrt{3} &> b \\ 2b + b\sqrt{3} - b &> 0 \\ b + b\sqrt{3} &> 0 \end{aligned}$$

  yang berarti memenuhi.

- Untuk $a = 2b - b\sqrt{3}$. Kita cek bahwa haruslah $a > b$.

$$\begin{aligned} a &> b \\ 2b - b\sqrt{3} &> b \\ 2b - b &> b\sqrt{3} \\ b &> b\sqrt{3} \\ 1 &> \sqrt{3} \end{aligned}$$

  sehingga tidak memenuhi.

Demikian $a = 2b + b\sqrt{3}$. Yang berarti

$$a = 2b + b\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right) b \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{4} - \sqrt{3}}$$

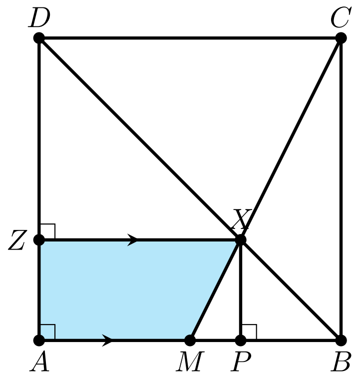
yang berarti $x = 4$ dan $y = 3$. Demikian $xy = \boxed{12}$.

> **Komentar.** Sebanyak 36.73% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**. Persamaan $a - b = \sqrt{2ab}$ juga setara dengan $a^2 - 4ab + b^2 = 0$. Kita dapat menganggap salah satu dari a dan b berupa variabel persamaan kuadrat, yaitu
>
> $$a_{1,2} = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 4b^2}}{2} = 2b \pm 2b\sqrt{3}$$
>
> Selanjutnya, dapat diselesaikan seperti solusi diatas.

10. Diberikan persegi $ABCD$ dan M merupakan titik tengah AB. Diagonal BD dan MC berpotongan di titik X. Dibuat garis ℓ yang melalui titik X. Garis ℓ sejajar dengan AB memotong sisi AD berturut-turut di titik Z. Diketahui luas $AMXZ$ adalah 1 satuan luas. Jika luas persegi $ABCD$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\dfrac{a}{b}$ dimana a, b bilangan asli dan $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai $a + b$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{43}}$

Tarik garis tinggi dari titik X ke AB dan memotong di P.



Misalkan panjang sisi persegi adalah $2s$. Maka panjang $AM = MB = s$. Perhatikan bahwa $\angle MBX = \angle XDC = 45^\circ$. Karena MB sejajar CD, maka $\angle BMX = \angle DCX$. Akibatnya, segitiga MBX dan segitiga CDX sebangun. Maka

$$\frac{BX}{DX} = \frac{MB}{CD} = \frac{s}{2s} = \frac{1}{2}$$

Perhatikan bahwa XZ sejajar dengan BA. Maka $\angle ZXD = \angle PBX = 45^\circ$. Tinjau juga $\angle BPX = \angle XZD$. Akibatnya, segitiga PBX dan segitiga ZXD. Maka

$$\frac{PX}{DZ} = \frac{BX}{DX} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow DZ = 2PX$$

Perhatikan bahwa $DZ + AZ = 2s$. Karena panjang $AZ = PX$, maka

$$2s = DZ + AZ = 2PX + PX = 3PX \Longleftrightarrow PX = \frac{2s}{3}$$

Kita punya $AZ = PX = \dfrac{2s}{3}$. Tinjau bahwa $\angle ZDX = 45^\circ$ sehingga berakibat $\angle ZXD = 45^\circ$. Karena $\angle ZDX = ZXD$, maka panjang

$$XZ = DZ = 2PX = 2 \cdot \frac{2s}{3} = \frac{4s}{3}$$

Perhatikan bahwa $AMXZ$ trapesium siku-siku. Sehingga luas $AMXZ$ adalah

$$\begin{aligned} L_{AMXZ} &= \frac{AM + XZ}{2} \cdot AZ \\ 1 &= \frac{s + \frac{4s}{3}}{2} \cdot \frac{2s}{3} \\ &= \frac{7s}{3} \cdot \frac{s}{3} \\ 1 &= \frac{7s^2}{9} \\ s^2 &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

Sehingga luas persegi $ABCD$ adalah

$$L_{ABCD} = (2s)^2 = 4s^2 = 4 \cdot \frac{9}{7} = \frac{36}{7}$$

yang berarti $a = 36$ dan $b = 7$. Maka $a + b = \boxed{43}$.

> **Komentar.** Sebanyak 38.77% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**.

2 Kemampuan Lanjut

1. Didefinisikan $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$ untuk setiap bilangan asli n. Diberikan

$$f(m,n) = \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

untuk setiap bilangan asli $m \leq n$. Jika nilai dari

$$f(2,2020)\,(1 + f(3,2020)) - f(1,2020) \cdot f(3,2020)$$

dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{2020}$, tentukan nilai a.

Jawab: $\boxed{\mathbf{1010}}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2020} &= f(2,2020)(1 + f(3,2020) - f(1,2020) \cdot f(3,2020) \\
&= f(2,2020) + f(2,2020) \cdot f(3,2020) - f(1,2020) \cdot f(3,2020) \\
&= f(2,2020) + f(3,2020)(f(2,2020) - f(1,2020))
\end{aligned}$$

Tinjau bahwa

$$f(1,2020) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{2020!} = 1 + f(2,2020)$$

sehingga $f(2,2020) - f(1,2020) = -1$. Maka

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2020} &= f(2,2020) + f(3,2020)(f(2,2020) - f(1,2020)) \\
&= f(2,2020) + f(3,2020) \cdot (-1) \\
&= f(2,2020) - f(3,2020) \\
&= \frac{1}{2!} \\
\frac{a}{2020} &= \frac{1}{2} \\
a &= \frac{1}{2} \cdot 2020 \\
a &= 1010
\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari a adalah $\boxed{1010}$.

> **Komentar.** Sebanyak 55.1% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah-sedang** yang merupakan soal termudah pada bagian kemampuan lanjut.

2. Diberikan $0 < x < 1$ yang memenuhi

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = 16$$

Tentukan nilai dari $2020x$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{1515}}$

Perhatikan bahwa

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = 16x$$

Sehingga didapatkan

$$16 - 16x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

yang berarti

$$1 = (16 - 16x)(1 - x) = 16(1 - x)(1 - x) = 16(1 - x)^2 \iff (1 - x)^2 = \frac{1}{16}$$

Kita dapatkan

$$1 - x = \pm\frac{1}{4} \iff x = \frac{3}{4} \quad \text{atau} \quad x = \frac{5}{4}$$

Demikian $x = \dfrac{3}{4}$ yang berarti $2020x = \boxed{1515}$.

> **Komentar.** Sebanyak 40.81% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**.

3. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi

$$10 \leq a + b + c + d \leq 100$$

Jawab: $\boxed{\mathbf{3921099}}$

Kita cari banyaknya pasangan bilangan asli (a, b, c, d) sehingga $a + b + c + d \leq 100$. Maka terdapat bilangan asli n sehingga

$$a + b + c + d = 101 - n \iff a + b + c + d + n = 101$$

> **Teorema 2.0.1** (Star and Bar Theorem)
> Banyak solusi bilangan asli $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ sehingga
>
> $$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = k$$
>
> adalah C^{k-1}_{n-1} dimana $k \geq n$.

Sehingga banyak pasangan bilangan asli (a, b, c, d, n) yang memenuhi adalah

$$C^{101-1}_{5-1} = C^{100}_{4} = \frac{100!}{4!96!} = 3921225$$

Kita cari banyaknya pasangan bilangan asli (a, b, c, d) sehingga $a + b + c + d \leq 9$. Maka terdapat bilangan asli m sehingga

$$a + b + c + d = 10 - m \iff a + b + c + d + m = 10$$

Sehingga banyak pasangan bilangan asli (a, b, c, d, m) yang memenuhi adalah

$$C^{10-1}_{5-1} = C^{9}_{4} = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

Sehingga banyak pasnagan bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi $10 \leq a+b+c+d \leq 100$ adalah

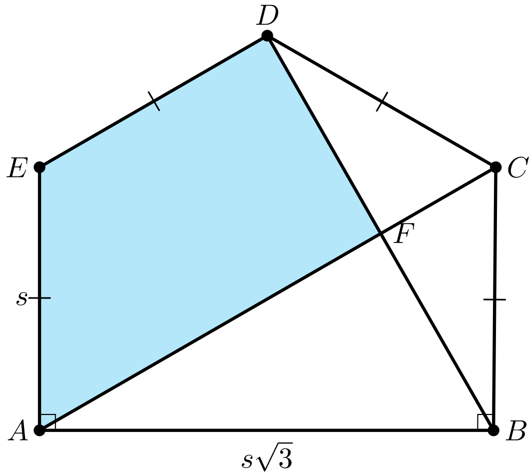
$$3921225 - 126 = \boxed{3921099}$$

> **Komentar.** Sebanyak 16.32% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sangat sulit**.

4. Diberikan segilima $ABCDE$ dimana $\angle BAE = \angle ABC = 90°$ dan $\angle BCD = \angle AED = 120°$. Panjang $BC = CD = DE = EA = \dfrac{AB}{3}\sqrt{3}$. Misalkan AC dan BD berpotongan di titik F. Perbandingan luas $AFDE$ terhadap segilima $ABCDE$ dapat dinyatakan dalam bentuk $p : q$ dimana p, q bilangan asli dan $FPB(p, q) = 1$. Tentukan nilai $p + q$.

   Jawab: $\boxed{3}$

   Misalkan panjang $BC = CD = DE = EA = s$. Maka panjang $BC = s\sqrt{3}$.



Perhatikan segitiga ABC. Dari pythagoras, kita punya

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3s^2 + s^2} = 2s$$

Karena $BC : AB : AC = 1 : \sqrt{3} : 2$, dari perbandingan segitiga istimewa maka $\angle BAC = 30°$ dan $\angle ACB = 60°$. Perhatikan bahwa panjang $CB = CD$. Akibatnya, $\angle CBD = \angle CDB$. Karena besar $\angle BCD = 120°$, maka $\angle CBD = \angle CDB = 30°$. Dari segitiga BCF, karena $\angle CBF = 30°$ dan $\angle FCB = 60°$, maka $\angle CFB = 90°$. Kita punya juga

$$\angle ABF = 90° - \angle BCF = 90° - 30° = 60°$$

Sehingga $\angle BFA = 30°$. Akibatnya, $BF : AF : AB = 1 : \sqrt{3} : 2$. Sehingga

$$AF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s\sqrt{3} = \frac{3}{2}s$$

Perhatikan segitiga DCF. Karena $\angle DCF = 60°$ dan $\angle CDF = 30°$, maka $CF : DF : DC = 1 : \sqrt{3} : 2$. Sehingga

$$DF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot DC = \frac{\sqrt{3}}{2}s \quad \text{dan} \quad CF = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2}s$$

Perhatikan juga bahwa jumlah semua sudut dalam dari segilima adalah $180° \cdot (5-2) = 540°$. Sehingga $\angle CDE = 120°$. Karena $\angle CDB = 30°$, maka $\angle EDF = 90°$. Artinya, DE sejajar

FA. Sehingga $AFDE$ merupakan trapesium siku-siku. Maka luas $AFDE$ adalah

$$\begin{aligned}
L_{AFDE} &= \frac{DE + AF}{2} \cdot FD \\
&= \frac{s + \frac{3}{2}s}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s \\
&= \frac{5s}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s \\
L_{AFDE} &= \frac{5\sqrt{3}}{8}s^2
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$AC = AF + FC = \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}s = 2s$$

Perhatikan bahwa $ACDE$ trapesium. Maka

$$\begin{aligned}
L_{ABCDE} &= L_{ABC} + L_{ACDE} \\
&= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC + \frac{DE + AC}{2} \cdot DF \\
&= \frac{1}{2} \cdot s\sqrt{3} \cdot s + \frac{s + 2s}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}s^2 \\
L_{ABCDE} &= \frac{5\sqrt{3}}{2}s^2
\end{aligned}$$

Maka

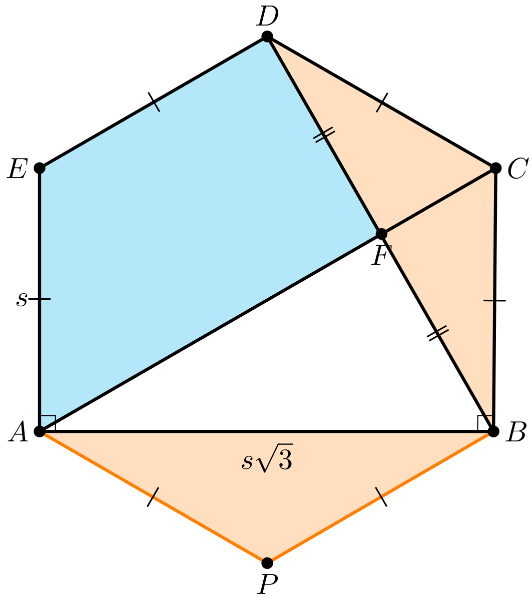
$$\frac{L_{AFDE}}{L_{ABCDE}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{8}s^2}{\frac{5\sqrt{3}}{4}s^2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Maka $L_{AFDE} : L_{ABCDE} = 1 : 2$ yang berarti $p = 1$ dan $q = 2$. Maka $p + q = \boxed{3}$.

Solusi Alternatif. Dengan cara yang sama, kita punya $\angle CFB = 90^\circ$, $\angle FBC = 30^\circ$, dan $\angle FCB = 60^\circ$. Sehingga $CF : FB : CB = s$. Demikian panjang

$$BF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Dengan cara yang sama, kita dapatkan juga panjang $FD = \dfrac{s}{2}\sqrt{3}$. Sehingga panjang $BD = s\sqrt{3}$. Demikian panjang $AB = BD$. Misalkan terdapat titik P sehingga segitiga ABP kongruen dengan segitiga BDC.



Demikian segilima $APBDE$ kongruen dengan segilima $ABCDE$. Karena CF tegak lurus BD dan panjang $BC = CD$, maka panjang $BF = FD$. Artinya, segiempat $APBF$ kongruen dengan segiempat $AFDE$ yang berarti kedua luas bangun tersebut sama. Sehingga

$$\frac{L_{AFDE}}{L_{ABCDE}} = \frac{L_{AFDE}}{L_{APBDE}} = \frac{L_{AFDE}}{2L_{AFDE}} = \frac{1}{2}$$

sehinggga $p = 1$ dan $q = 2$. Maka $p + q = \boxed{3}$.

> **Komentar.** Sebanyak 28.57% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-sulit**. Mengacu pada solusi yang kedua, menemukan hal yang krusial dapat membantu menyelesaikan soal geometri dalam waktu yang lebih singkat seperti pada perbandingan dua solusi diatas.

5. Jika nilai dari

$$\frac{1}{2^3-2} + \frac{1}{3^3-3} + \frac{1}{4^3-4} + \frac{1}{5^3-5} + \cdots + \frac{1}{100^3-100}$$

dapat dinyatakan dalam pecahan sederhana $\frac{a}{b}$. Tentukan nilai dari $a + b$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{25249}}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^3-n} &= \frac{1}{n\left(n^2-1\right)} \\
&= \frac{1}{(n-1)n(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(n-1)n(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1-(n-1)}{(n-1)n(n+1)} \\
\frac{1}{n^3-n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)
\end{aligned}$$

Kita dapatkan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^3-2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)\\
\frac{1}{3^3-3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)\\
\frac{1}{4^3-4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)\\
&\vdots\\
\frac{1}{100^3-100} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99\cdot 100}-\frac{1}{100\cdot 101}\right)
\end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan semuanya, didapat

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{3^3-3}+\frac{1}{4^3-4}+\frac{1}{5^3-5}+\cdots+\frac{1}{100^3-100}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{100\cdot 101}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{50\cdot 101-1}{100\cdot 101}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{5049}{10100}\\
&= \frac{5049}{20200}
\end{aligned}$$

Demmikian $a = 5049$ dan $b = 20200$ sehingga $a + b = \boxed{25249}$.

> **Komentar.** Sebanyak 20.40% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sulit**. Dalam menghitung deret yang sukunya banyak, hal ini akan lebih efisien jika kita menggunakan teleskopik yang diperoleh pengolahan bentuk dari deret tersebut.

6. Tentukan banyak bilangan asli $1 \le n \le 2020$ sehingga faktor persekutuan terbesar dari $2n + 5$ dan $5n + 9$ merupakan bilangan prima.

Jawab: $\boxed{\textbf{289}}$

Misalkan $FPB(2n + 5, 5n + 9) = p$ dimana p bilangan prima. Maka p habis membagi $2n + 5$ dan $5n + 9$.

> **Lemma 2.0.2**
>
> Jika p habis membagi a dan p habis membagi b, maka p membagi $ax + by$ dimana x, y bilangan bulat.

Bukti. Jelas bahwa p habis membagi ax dan by sehingga p habis membagi $ax + by$. □

Karena p habis membagi $2n + 5$ dan $5n + 9$, dari **Lemma 2.0.2** maka p habis membagi

$$5(2n + 5) - 2(5n + 9) = 10n + 25 - 10n - 18 = 7$$

yang berarti p membagi 7. Karena p prima, dapat disimpulkan bahwa $p = 7$. Demikian

$2n+5$ harus habis dibagi 7.

$$\begin{aligned} 2n+5 &\equiv 0 \pmod 7 \\ 2n &\equiv -5 \pmod 7 \\ 2n &\equiv 2 \pmod 7 \\ n &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

Tuliskan $n = 7k+1$ dimana k bilangan cacah. Sehingga

$$1 \le n \le 2020 \iff 1 \le 7k+1 \le 2020 \iff 0 \le k \le \frac{2019}{7}$$

Karena k bilangan cacah, maka $0 \le k \le 288$. Demikian $k = 0, 1, 2, \cdots, 288$. Karena nilai n unik ditentukan oleh k, maka banyak nilai n sama dengan banyak nilai k, yaitu $\boxed{289}$.

> **Komentar.** Sebanyak 36.73% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-sulit**. Dalam menentukan FPB dari suatu bilangan dapat menggunakan sifat keterbagian. Dengan sifat keterbagian, kita olah bagaimana caranya mendapatkan suatu bentuk tanpa ada variabel.

7. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (a, b, c) sehingga

$$2020 = ab + ac + abc$$

Jawab: $\boxed{\mathbf{30}}$

Tinjau

$$2020 = ab + ac + abc = a(b+c+bc) = a((b+1)(c+1)-1) \iff \frac{2020}{a} + 1 = (b+1)(c+1)$$

Perhatikan bahwa $b+1 \ge 2$ dan $c+1 \ge 2$. Maka

$$\frac{2020}{a} + 1 = (b+1)(c+1) \ge 2 \cdot 2 = 4 \iff \frac{2020}{a} \ge 3$$

yang menyimpulkan

$$\frac{2020}{3} \ge a \implies 673\frac{1}{3} \ge a$$

Perhatikan bahwa a harus faktor dari 2020. Maka

$$a = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505$$

- Jika $a = 1$, maka $(b+1)(c+1) = 2021 = 43 \cdot 47$ yang hanya akan dipenuhi $(b, c) = (42, 46), (46, 42)$ yang berarti ada 2 pasangan.
- Jika $a = 2$, maka $(b+1)(c+1) = 1011 = 3 \cdot 37$ yang hanya akan dipenuhi $(b, c) = (2, 36), (36, 2)$ yang berarti ada 2 pasangan.
- Jika $a = 4$, maka $(b+1)(c+1) = 506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$. Banyak pasangan (b, c) seluruhnya ditentukan dengan banyak faktor dari 506, tetapi dikurangi dengan pasangan $(b+1, c+1) = (1, 506), (506, 1)$. Sehingg ada

$$(1+1)(1+1)(1+1) - 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 6$$

- Jika $a = 5$, maka $(b + 1)(c + 1) = 405 = 3^4 \cdot 5$. Dengan cara yang sama, pasangan (b, c) ada sebanyak
$$(4 + 1)(1 + 1) - 2 = 5 \cdot 2 - 2 = 8$$
- Jika $a = 10$, maka $(b + 1)(c + 1) = 203 = 7 \cdot 29$. Dengan cara yang sama, maka pasangan (b, c) ada sebanyak
$$(1 + 1)(1 + 1) - 2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$
- Jika $a = 20$, maka $(b + 1)(c + 1) = 102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Dengan cara yang sama, maka pasangan (b, c) ada sebanyak
$$(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 6$$
- Jika $a = 101$, maka $(b + 1)(c + 1) = 21 = 3 \cdot 7$. Dengan cara yang sama, maka pasangan (b, c) ada sebanyak
$$(1 + 1)(1 + 1) - 2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$
- Jika $a = 202$, maka $(b + 1)(c + 1) = 11$. Dengan cara yang sama, maka pasangan (b, c) ada sebanyak
$$(1 + 1) - 2 = 2 - 2 = 0$$
- Jika $a = 404$, maka $(b+1)(c+1) = 6 = 2 \cdot 3$. Dengan cara yang sama, maka pasangan (b, c) ada sebanyak
$$(1 + 1)(1 + 1) - 2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$
- Jika $a = 505$, maka $(b + 1)(c + 1) = 5$. Dengan cara yang sama, maka pasangan (b, c) ada sebanyak
$$(1 + 1) - 2 = 2 - 2 = 0$$

Sehingga total banyak pasangan seluruhnya adalah
$$2 + 2 + 6 + 8 + 2 + 6 + 2 + 2 = \boxed{30}$$

> **Komentar.** Sebanyak 18.36% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sulit**. Yang cukup membuang energi yaitu ketika menentukan banyak pasangan (a, b, c) yang memang harus nguli :) Perlu diperhatikan juga bahwa ketika nguli sangat memungkinkan untuk terjadinya kekeliruan.

8. Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 15\}$. Suatu himpunan $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dimana $A \subseteq S$ dikatakan *aneh* jika memenuhi
$$\begin{aligned} x_2 &\geq x_1 + 1 \\ x_3 &\geq x_2 + 2 \\ x_4 &\geq x_3 + 3 \end{aligned}$$
Tentukan banyak himpunan A aneh yang dapat dibentuk.

Jawab: $\boxed{\mathbf{495}}$

Misalkan $d_2 = x_2 - x_1, d_3 = x_3 - x_2$, dan $d_4 = x_4 - x_3$. Maka

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 \geq 1 &\iff d_2 \geq 1 \\ x_3 - x_2 \geq 2 &\iff d_3 \geq 2 \\ x_4 - x_3 \geq 3 &\iff d_4 \geq 3 \end{aligned}$$

Tinjau bahwa

$$x_1 + d_2 + d_3 + d_4 = x_4 \leq 15$$

Misalkan $d_3 = 1 + e_3$ dan $d_4 = e_4 + 2$. Maka

$$x_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 15 \iff x_1 + d_2 + e_3 + e_4 \leq 12$$

Maka terdapat bilangan asli k sehingga

$$x_1 + d_2 + e_3 + e_4 = 13 - k \iff x_1 + d_2 + e_3 + e_4 + k = 13$$

Dari **Teorema 2.0.1**, banyak pasangan bilangan asli (x_1, d_2, e_3, e_4, k) adalah

$$C_{5-1}^{13-1} = C_4^{12} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

Jadi, banyak himpunan A aneh adalah $\boxed{495}$.

> **Komentar.** Sebanyak 24.48% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-sulit**.

9. Diberikan x, y, z memenuhi $x = y + z$ dan didefinisikan fungsi f dan g sebagai

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^5}{(3x+2y)^4 - 18xy(3x+2y)^2 + 36(xy)^2} \\ g(x,y) &= \frac{y^5}{(2y+3x)^4 - 18yx(2y+3x)^2 + 3y(yx)^2} \end{aligned}$$

Jika

$$\begin{aligned} f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) &= 4 \\ g(x,y) + g(y,z) + g(z,x) &= 2 \end{aligned}$$

Tentukan nilai x.

Proposed by Akhmad Syauqi Rifan Fathoni

Jawab: $\boxed{454}$

Kurangkan kedua persamaan berikut.

$$\begin{aligned} 3^5 f(x,y) + 3^5 f(y,z) + 3^5 f(z,x) &= 4 \cdot 3^5 \\ 2^5 g(x,y) + 2^5 g(y,z) + 2^5 g(z,x) &= 2 \cdot 2^5 \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\left(3^5 f(x,y) - 2^5 g(x,y)\right) + \left(3^5 f(y,z) - 2^5 g(y,z)\right) + \left(3^5 f(z,x) - 2^5 g(z,x)\right) = 908$$

Tinjau masing-masing sukunya. Perhatikan untuk $3^5f(x,y)-2^5g(x,y)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{3^5x^5}{(3x+2y)^4-18xy(3x+2y)^2+36(xy)^2} - \frac{2^5y^5}{(2y+3x)^4-18yx(2y+3x)^2+3y(yx)^2} \\
&= \frac{(3x)^5-(2y)^5}{(3x+2y)^4-18xy(3x+2y)^2+36(xy)^2} \\
&= \frac{(3x-2y)\left((3x)^4+(3x)^3(2y)+(3x)^2(2y)^2+(3x)(2y)^3+(2y)^4\right)}{(3x+2y)^4-18xy(3x+2y)^2+36(xy)^2} \\
&= \frac{(3x-2y)\left(81x^4+27x^3\cdot 2y+9x^2\cdot 4y^2+3x\cdot 8y^3+16y^4\right)}{(3x+2y)^4-18xy(3x+2y)^2+36(xy)^2} \\
&= \frac{(3x-2y)\left(81x^4+54x^3y+36x^2y^2+24xy^3+16y^4\right)}{(3x+2y)^4-18xy(3x+2y)^2+36(xy)^2}
\end{aligned}$$

Tinjau bentuk penyebutnya.

$$\begin{aligned}
&= (3x+2y)^4-18xy(3x+2y)^2+36(xy)^2 \\
&= (3x)^4+4(3x)^3(2y)+6(3x)^2(2y)^2+4(3x)(2y)^3+(2y)^4-18xy\left((3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2\right) \\
&\quad +36x^2y^2 \\
&= 81x^4+216x^3y+216x^2y^2+96xy^3+16y^4-18xy\left(9x^2+12xy+4y^2\right)+36x^2y^2 \\
&= 81x^4+216x^3y+216x^2y^2+96xy^3+16y^4-162x^3y-216x^2y^2-72xy^3+36x^2y^2 \\
&= 81x^4+54x^3y+36x^2y^2+24xy^3+16y^4
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
3^5f(x,y)-2^5g(x,y) &= \frac{(3x-2y)\left(81x^4+54x^3y+36x^2y^2+24xy^3+16y^4\right)}{(3x+2y)^4-18xy(3x+2y)^2+36(xy)^2} \\
&= \frac{(3x-2y)\left(81x^4+54x^3y+36x^2y^2+24xy^3+16y^4\right)}{81x^4+54x^3y+36x^2y^2+24xy^3+16y^4} \\
&= 3x-2y
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, maka

$$3^5f(y,z)-2^5(y,z)=3y-2z \quad \text{dan} \quad 3^5f(z,x)-2^5g(z,x)=3z-2x$$

Demikian

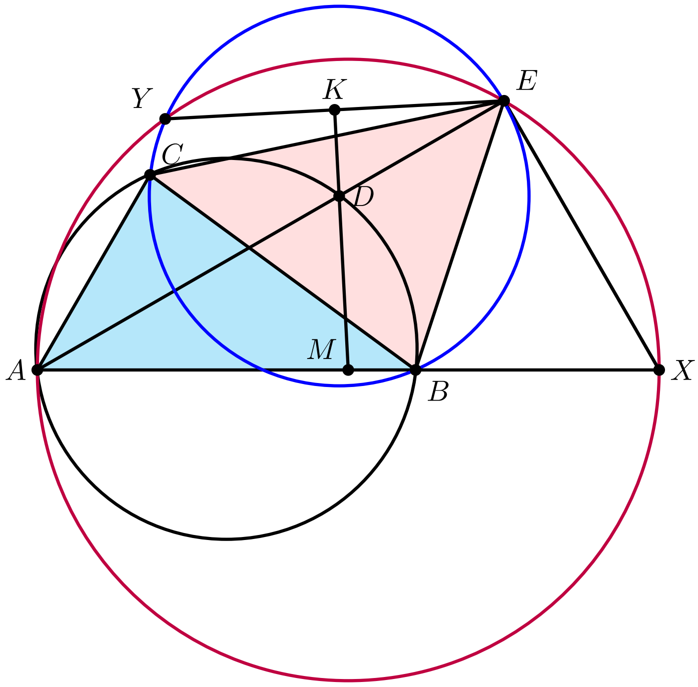
$$\begin{aligned}
908 &= \left(3^5f(x,y)-2^5g(x,y)\right)+\left(3^5f(y,z)-2^5g(y,z)\right)+\left(3^5f(z,x)-2^5g(z,x)\right) \\
&= 3x-2y+3y-2z+3z-2x \\
&= x+y+z \\
&= x+x \\
&= 2x \\
454 &= x
\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari x adalah $\boxed{454}$.

> **Komentar.** Soal ini merupakan **soal tersulit** pad bagian kemampuan lanjut mengingat bahwa hanya tepat satu peserta yang berhasil menjawab soal ini dengan benar.

10. Kejutan! Diberikan segitiga ABC dengan I merupakan titik pusat lingkaran dalamnya. Garis AI memotong lingkaran luar segitiga ABC di titik D dimana $D \neq A$. Misalkan E

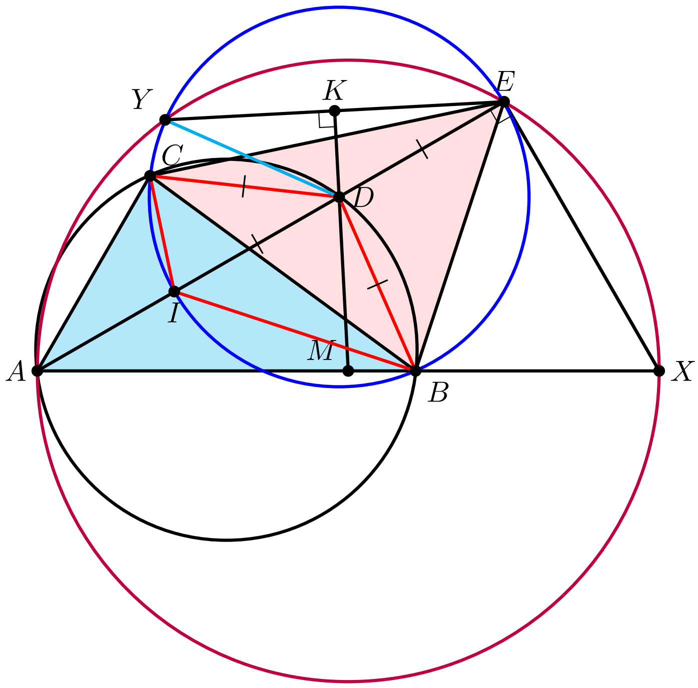
adalah bayangan pencerminan titik I terhadap D. Titik X terletak pada perpanjangan sisi AB sehingga $\angle XED = 90°$. Misalkan M titik tengah dari AX. Lingkaran luar dari segitiga AEX dan segitiga BEC berpotongan di titik Y dimana $Y \neq E$. Jika garis MD berpotongan dengan YZ di titik K, tentukan nilai dari $100 \cdot \dfrac{YE}{YK}$.



Jawab: $\boxed{\textbf{200}}$

Misalkan $\angle BAC = 2\alpha, \angle ABC = 2\beta$, dan $\angle BCA = 2\gamma$. Maka $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, maka $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Karena I merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC, maka I merupakan perpotongan garis bagi segitiga ABC. Sehingga

$$\angle BAI = \angle CAI = \alpha, \quad \angle ABI = \angle CBI = \beta, \quad \angle ACI = \angle BCI = \gamma$$



> **Klaim 2.0.3 —** D merupakan titik pusat lingkaran luar segitiga BIC dan segitiga BEC.

Bukti. Perhatikan bahwa $ABDC$ merupakan segiempat talibusur. Akibatnya,

$$\angle DBC = \angle DAC = \alpha$$

Maka $\angle IBD = \alpha + \beta$. Tinjau juga bahwa

$$\angle BID = \angle BAI + \angle ABI = \alpha + \beta = \angle IBD$$

yang berarti panjang $DI = DB$. Karena $ABDC$ segiempat talibusur, akibatnya

$$\angle DCB = \angle DAB = \alpha = \angle DBC$$

sehingga panjang $DB = DC$. Dapat disimpulkan bahwa $DC = DB = DI$. Karena E bayangan pencerminan titik I terhadap titik D, maka panjang $DI = DE$. Karena panjang $DC = DB = DI = DE$, maka dapat dibuat lingkaran yang berpusat di D dan melalui titik B, E, C, I. Artinya, D merupakan titik pusat lingkaran luar segitiga BIC dan segitiga BEC. $\square$

Kita tahu bahwa $\angle AEX = 90°$. Dari hubungan sudut pusat-sudut keliling, maka AX merupakan diameter lingkaran luar segitiga AEX. Karena M titik tengah AX, maka M merupakan titik pusat dari lingkaran luar segitiga AEX.

> **Klaim 2.0.4 —** MK tegak lurus dengan YE.

Bukti. Perhatikan bahwa YE merupakan *radical axis* dari lingkaran luar segitiga AEX dan lingkaran luar segitiga BEC. Karena M dan D berturut-turut pusat lingkaran luar AEX dan lingkaran luar BEC, maka perpanjangan MD tegak lurus terhadpa *radical axis* YE. Artinya, MK tegak lurus dengan YE. $\square$

Karena panjang $DY = DE$ dan DK tegak lurus dengan YE, akibatnya panjang $YK = KE$. Sehingga $100 \cdot \dfrac{YE}{YK} = 100 \cdot 2 = \boxed{200}$.

> **Komentar.** Sebanyak 32.65% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**. Soal ini seperti mengandung hint/petunjuk karena gambar yang diberikan :)